B6. 定常電流とオームの法則、電荷保存則

■電流：電界が印加されたとき、クーロン力により媒体(金属)内の電子は平均して移動する
この移動の時間的変化を”電流”と呼ぶ

■電流密度：単位面積当たりの電流 $\boldsymbol{J}$ [A/m^2]

■微子的表示のオームの法則：$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ は局所的現象を表している

・例題：導線を例に巨視的(電気回路的)な関係式を誘導する

断面 S 内の電流 $I = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = JS$

距離 ℓ 間の電圧 $V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E\ell = \frac{J}{\sigma}\ell = \frac{I\ell}{\sigma S} = RI \ \left(R = \frac{\ell}{\sigma S}\right)$

→ 周知のオームの法則

■電流と電荷の連続性：電荷の保存則

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0}$$

Georg Simon Ohm
1789年-1854年
電気回路学の樹立

・電荷の保存則の物理的な意味を説明してください

B7. 電流密度と電気変位のアナロジー

■類似性(アナロジー)：物理現象を表す数式が同形の場合、他方の現象を類推するのに一方の物理現象の性質を利用できる

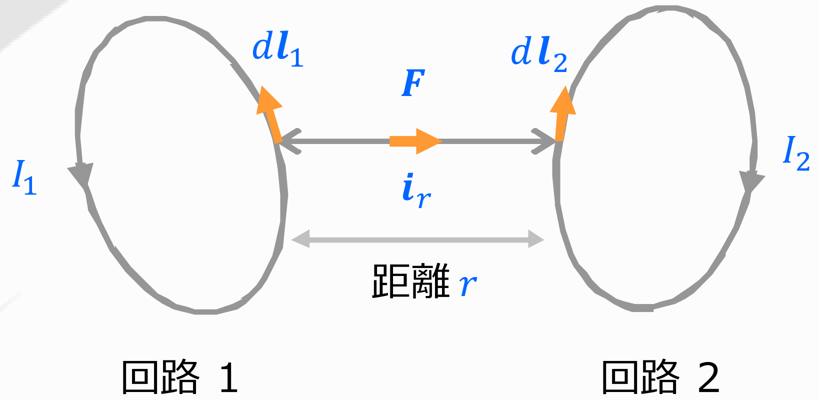
■多くの媒質において、定常電流密度 $\boldsymbol{J}$ と電気変位 $\boldsymbol{D}$ は電界 $\boldsymbol{E}$ に比例している

導電媒質	誘電媒質
$\nabla \times \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$	$\nabla \times \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$
$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$
$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$
$V = IR$	$Q = CV$

・物理現象では、他にどんなアナロジーがあるでしょうか

■クーロン則からの類推：電流が流れている回路が二つ以上あるとき、回路間には力が働く

… エルステッド、アンペア、ビオとザバールの実験 …



$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\frac{I_2 d\mathbf{l}_2\times(I_1 d\mathbf{l}_1\times\mathbf{i}_r)}{r^2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\int\int\frac{d\mathbf{l}_1\times d\mathbf{l}_2\times\mathbf{i}_r}{r^2}$$

・逆2乗の法則：$4\pi r^2$ は球の表面積

・比例定数を透磁率という：$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ [H/m]

Jean-Baptiste Biot
1774年-1862年

・$\boldsymbol{i}_r$ は r 方向の単位ベクトルです
・外積等に注意して、上式の力の働く方向について議論してください

B9. 磁界：ビオとサバールの法則

■磁界の導入：磁束密度 ***B*** [Weber/m²]

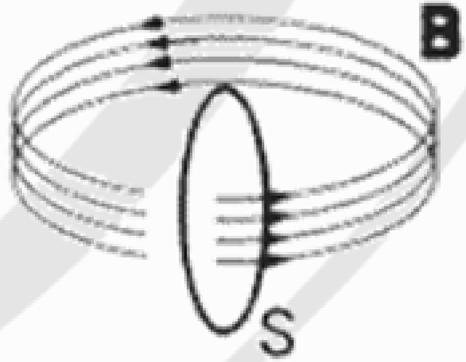
$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \int d\mathbf{l}_2 \times \left\{ \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{i}_r}{r^2} \right\} = I_2 \int d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{i}_r}{r^2} \qquad (I_2 d\mathbf{l}_2 = \mathbf{J} dS dl)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x', y', z') \times \mathbf{i}_r}{r^2} dV'$$

■力線：電界ベクトル → 電気力線

磁束密度の方向を向いた力線を磁力線という　(ファラディが導入)

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS$$



■ベクトル場：発散(∇・) と 回転(∇×) が指定されれば、一意的に決定される

・発散 → 径方向のベクトル場が存在する

・回転 → 渦を巻くようなベクトル場が存在

■ソレノイダルな場：電荷と電界に対応する磁荷なるものは存在しない

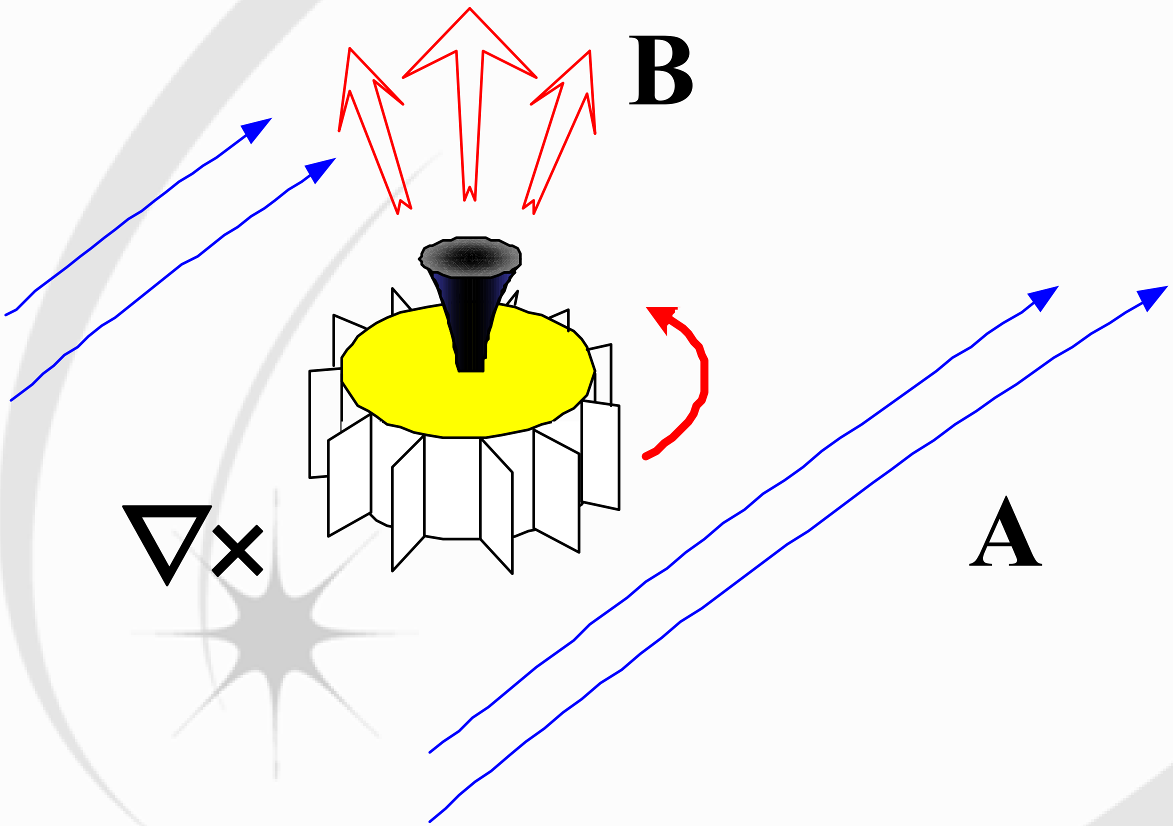
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{i}_r}{r^2} dV' = \frac{-\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left\{ \mathbf{J} \times \nabla \frac{1}{r} \right\} dV' = 0$$

B10. 磁束密度とベクトルポテンシャル

■ベクトルの回転演算に関連して、ベクトルポテンシャルという概念がある

■電界 $\boldsymbol{E}$ の場合、 $\boldsymbol{E} = \nabla\varphi$ となるような スカラーポテンシャル φ が存在する、静電界ではこれは電位に相当、そして、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の場合には $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ となる $\boldsymbol{A}$ を考えることができる、これを **ベクトルポテンシャル** と呼ぶ

$$\mathbf{A}(x', y', z') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{r^2} dV', \quad \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}$$



・電磁界理論、アンテナの分野では必須の数学的手段であり、Hertzベクトル と同様、補助ベクトルの一種である **B** 自体はベクトル量であるので、向きを持っている この向きは何を示すのであろうか
・水車のイメージを **B**=▽×**A** に適用すれば、それは **A** という流れの中にある水車で、その中心軸の向きに磁束密度が発生しており、その大きさは水車の回転速度に比例している 磁力線の発生に必要なエネルギーを ∇×**A** に相当する回転演算から得ている ベクトルポテンシャルは磁力線でも電気力線でもなく、これらの力線を産み出す流れと考えられる 放射界あるいは散乱界などを与える ベクトルポテンシャルは電磁流の総和として表現される
・この流れが回転演算を通して電磁界を産み出すのである 「ポテンシャル」という表現もこの辺りの事情を表していると考えられる
・因みに、スカラーポテンシャルの具体例は電位(電圧)である

・家庭の電気洗濯機等の渦を例に、ベクトルポテンシャルの動作を説明してください

B11. 磁界とアンペアの周回積分

■定常電流 J が流れているとき、自由空間のような非磁性体に生じる磁束密度 B と J の関係：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

■磁界強度 H の導入：

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

■アンペアの周回積分の法則：

$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$ にストークスの定理を適用

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

・C ：面 S の周縁
・I ：面 S を通り抜ける全電流

André-Marie Ampère
1775–1836

・無限に広い導体平板上に一定の方向に電流 I が一様に流れているとき、この平面周囲の磁界はどのように求められるか考えてください

B12. ファラディの電磁誘導の法則

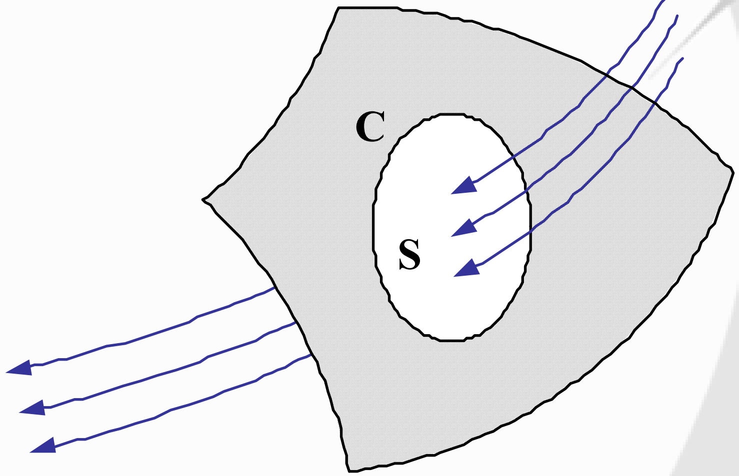
■電磁誘導の法則：　電場と磁場の関係を定量的に結び付けた実験法則であり、1981年ファラディが発見

■回路Ａに瞬間的な電流を誘起させるには：
・起電力のある近接した回路Ｂのスイッチを入り切りしたとき
・定常電流が流れている回路Ｂを回路Ａと相対的に移動させたとき
・永久磁石を回路Ａに出し入れしたとき

↓

回路を貫く磁束が時間的に変化して、起電力が発生し電流が流れる

■時間的に変化する磁界内に回路を置いたとき、この回路に電流が流れる　これを Faradayの電磁誘導の法則 といい(1831)、電界と磁界の間の関係を定量的に関係付けた最初の実験である　閉曲線Ｃで囲まれた曲面Ｓで、Ｓを通り抜ける磁束Ψと閉曲線Ｃに沿って誘起される起電力の時間変化は等しいことを示す



・閉曲線 c で囲まれた曲面 s を通る磁束：

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

・閉曲線 c に沿って誘起される起電力：

$$V = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

・電磁誘導の積分形

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS$$

・微分形：　左辺にストークスの定理を適用

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Michael Faraday,
1791-1867, 英

B13. インダクタンス

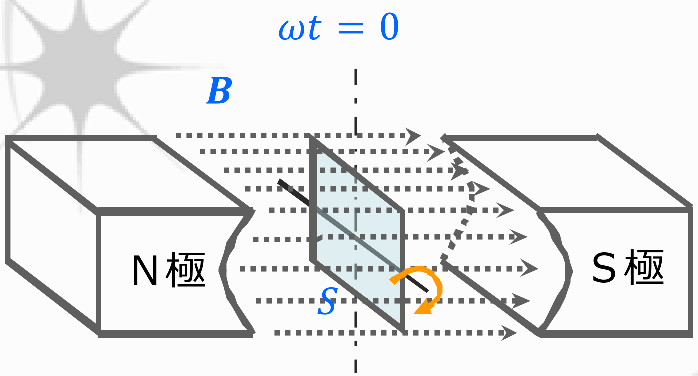
■相互インダクタンス：コイル１と２が近接されているとき、コイル１に流れる電流が時間的に変化すると、電磁誘導の法則に従い、コイル２に起電力が生じる この目安を 相互インダクタンス という

■自己インダクタンス：単一のコイルに電流が流れると、磁束が発生する 磁束が時間的に変化すると起電力が生じる この定数を自己インダクタンスという

■レンツ(Lentz)の法則：起電力による電流(磁束)は元々流れている電流(磁束)の変化を妨ぐように働く … 電磁誘導の式の負号がこれに相当

■インダクタ：電流の時間的変化が起電力を誘起するようなデバイス

・電磁誘導の法則を使うと、発電機の原理が簡単に説明できる



・磁束密度：B
・コイルの面積 S、回転角速度 ω

・磁束が通り抜けるコイルの面積

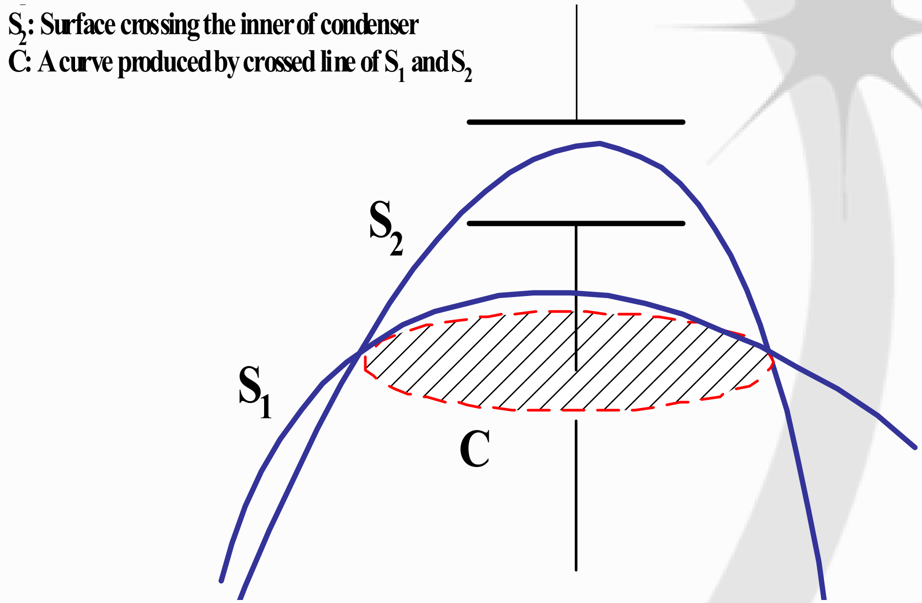
$$\Phi = BS\cos(\omega t)$$

・電磁誘導の法則より

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega\sin(\omega t)$$

・1840年 英国アームストロングが発明

B14. 拡張したアンペアの法則



・アンペアの法則
電流が流れている回路を2個以上接近させて置くと、回路の間に力が働く
これをAmpereの力の法則というが、電界 $\boldsymbol{E}$ という近接場のパラメータに対応させると、磁束密度と電流の関連が得られる

・拡張されたアンペアの法則
アンペアの法則は、時間的に変化する磁界の回転はそこを流れる電流に等しいことを主張している
しかし、電流・電荷の連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$$

に数学的に矛盾する　そこで、マックスウェル　は 変位電流 $\partial \boldsymbol{D} / \partial t$ を導入し、これを導電流 $\boldsymbol{J}$ と同じ働きをすると仮定し、 アンペアの法則を修正した

・時間的に変化しているとき、ファラディの法則を ∇×E=-∂B/∂t、アンペアの法則を ∇×B=μJ とすると、これに発散演算するとどうなるか、矛盾点を示してください

電磁気学から電磁波へ

☞ 電磁気学は電気と物質にかかわる諸現象を体系的に理論化、大学課程の2,3年で履修

・電磁気学は電気にかかわる物理現象を説明している基本中の基本です

・理論化した電磁気学は数学的表現が多く、電気系では一番嫌われる科目の筆頭ですが、何度かトライするうちに慣れることも事実です

・周知のマックスウェル (J. C. Maxwell) が発表した電磁方程式の論文では、3次元空間の全ての成分をいちいち表記していたため、今の数学表記法から見ると、同じ数式表現が何度も出て来て、恐ろしく長くなっています

・ところが、20世紀少し前に線形ベクトルの原型が発案され、表記が一気に短縮されました、微分演算子のナブラとか外積、内積などです

・ここでは、特にベクトル、行列等の知識を<一応>少し知っているという読者の前提で、電磁気学教科書の前半部分をギュッと十数枚の解析展開にチャレンジします

・<一応>というのは、解析とか計算、演習ができなくともいいわけで、それより<想像できる>ということの方が重要だからです

・ただ、興味が湧いてきたら、数学的な厳密性に一度は触れておきたいものです

スコットランドのエディンバラ市内公園にあるMaxwell記念碑,
2011, 著者(小林)撮影

電磁波の世界：やや詳しい説明 (1/14)

・前述のように、マックスウェルが提示した電磁界方程式は当初20個のスカラー式で記述されていました
・当時は現代のベクトル演算は未だ確立されておらず、後述のような表示法を初めて提示したのはオリバーヘビサイド (Oliver Heaviside, 1880年代) と言われています
・ここでは、マックスウェルの方程式に関し歴史的な観点も含めつつ少し詳しく経緯を電磁気学から調べてみることにします … ベクトル数はボールド体の太字で表します

… … …

☞ 電荷の移動が電流、入って出るので …

・電磁界の方程式は、電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ と電気変位 $\boldsymbol{D}$ および磁界ベクトル $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に関係し、これらのベクトルは電荷または電流などの波源と相互に関係を持つ
・ ρ を単位体積当たりの電荷密度とすると、体積 V 内の負電荷を差し引いた正味の正電荷は

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

で表される
・面 S を横切る電荷の移動の割合、即ち S を通過する正味の電流は

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$$

で与えられる
・ここで、$\boldsymbol{J}$ は電流密度、$\boldsymbol{n}$ は面 S に対する正方向に向いた単位法線ベクトルであり、電流密度 $\boldsymbol{J}$ の向きは正の電荷が移動する方向である

電磁波の世界：やや詳しい説明(2/14)

・電荷は勝手に増減しないという電荷の保存則から、閉じた面 S を通過する全電流はその体積内の正電荷が減少する割合に等しくなければならない、これは電流の定義より

$$\oint_s \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV$$

と表現できる

・電流の式は **<ガウス(Gauss)の発散定理>** より

$$\oint_s \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}\,dV$$

となり、結局、微分形の **<電流電荷連続の式>** が得られる：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

☞ クーロンの法則は遠隔作用なので …

・ベクトル $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は各々電荷と電流によって作用(影響)を受ける：考えている領域に存在する局所的な電荷 q に働く力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

・空間内のある体積 V に分布している電流に作用する力は

$$\boldsymbol{F} = \int_V \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\,dV$$

となる

電磁波の世界：やや詳しい説明 (3/14)

・ベクトル $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ は波源によって決定される
・閉じた面 S を通過する $\boldsymbol{D}$ の外向きのフラックス(束)は面内に閉じ込められた電荷 Q を使うと

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = Q$$

で与えられる
・磁界 $\boldsymbol{H}$ は電流 I に関係する
・この I を曲線 C で区切られた面 S を通過する正味の電流とすると、よく知られた **<アンペアの法則>**

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = I$$

が成立する、左辺の積分は曲線 C に沿った $\boldsymbol{H}$ の接線成分の線積分である

☞ 電流が流れると磁気が …

・この電流に関してアンペア(Ampere)の実験則から始めて、再度電磁気学そして電磁波工学を復習してみよう
・アンペアは1820年代に2つの電流ループ C_1 と C_2 に流れる電流を各々 I_1 と I_2 とすると、これらの間に働く力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times \left(d\boldsymbol{l}_2 \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\right)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}$$

で与えられるとした、μ_0 は真空中の透磁率、$d\boldsymbol{l}$ は曲線に沿う線素ベクトルである

電磁波の世界：やや詳しい説明(4/14)

・電荷 q が速度 $\boldsymbol{v}$ で磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 内を移動するとき、この電荷に作用する力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

で表される

・つまり、アンペアの法則は、平曲面 C_1 が座標 $\boldsymbol{r}$ で作る磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$は

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3}$$

という **<ビオ・サバールの法則(Biot-Savart)>** と等価な法則になることが分かる

・今、体積領域 V 内に存在する電流密度 $\boldsymbol{J}$ を考えると、ビオ・サバールの法則から磁束密度と

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d\boldsymbol{r}'$$

の関係式を得る

・さらに、座標の勾配（グラディエント）との関係式

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{r}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

を利用すると、上式は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\boldsymbol{r}'$$

と変形できる

・この $\boldsymbol{A}$ を我々は **<磁気的ベクトルポテンシャル>** と呼んでいる、局所的な電流密度は波源を考えなくても良いので、$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ である

電磁波の世界：やや詳しい説明 (5/14)

・そして、ポアッソンの法則 (Poisson)

$$f(\boldsymbol{x}) = \nabla_x^2 \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3} d\boldsymbol{y}$$

と、微分演算子 ∇ に関するベクトル恒等式

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot - \boldsymbol{\nabla}^2$$

を用いると、

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

が誘導できる、これは後述のマックスウェルの方程式の磁束密度に関する式となる

・上記は局所的な電流の流れに関する関係式であるが、これをもっと実際的な **<磁気ダイポール>** と呼ばれる小さな電流ループに拡張してみる 磁気ダイポールの存在により、上式の第1式には修正項が追加される

・これを見るために、ループ半径 R に流れている定常電流 I を $R \to +0,\ I \to \infty$ と極限操作する

・この結果、関係式

$$\alpha = \pi R^2 I$$

は一定の極限値をとる

・磁気ダイポールの磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ を

$$\boldsymbol{m} = \alpha \boldsymbol{n}$$

で定義する、$\boldsymbol{n}$ はループの外向き法線ベクトルである

電磁波の世界：やや詳しい説明 (6/14)

・前述の磁気的ベクトルポテンシャルより、このダイポールのポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \lim_{R\to+0}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

とできるので、磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ と直交し、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{F}$ で定義されるベクトル場の存在が予想できる
これを計算すると

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{A}}{\alpha^2} = \lim_{R\to+0}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{\boldsymbol{n}\times d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

となる
・ガウスの法則を上の積分に適用すると、

$$\int_C \frac{d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}'$$

となり、結局磁気ダイポールのベクトルポテンシャルは次のように与えられる：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}d\boldsymbol{r}_0$$

ここで、積分領域 V は C を含む体積領域、$\boldsymbol{r}_0$ は磁気ダイポールの置かれた座標を表している

電磁波の世界：やや詳しい説明 (7/14)

・次に、電流密度 $\boldsymbol{J}$ に媒質中の磁気ダイポール密度 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ が付加された場合を考える
・これは、先のベクトルポテンシャルと上のダイポールポテンシャルの和をとればよい：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left\{\frac{\boldsymbol{J}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right\} d\boldsymbol{r}'$$

・第1項で $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ なので、最終的に

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \nabla \times \boldsymbol{M}$$

が誘導できる
・磁界 $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$$

で定義すると、上式は

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

と書き換えられる
・線形の等方性媒質では $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ が成立する
・変数$\mu = \mu(\boldsymbol{r})$ を **<磁気的透磁率(permeability)>** と呼ぶ
・このように、外部からの磁界の影響が存在すると媒質内に新たに磁気ダイポールが形成されると理解できる

☞ 磁束の変化が電流を生む…

・次は、マックスウェルの方程式における実験的な電磁誘導に関する方程式である
・これは1831,32年にファラディ(Faraday)が実証したもので、導電ループを横切る磁束が変化するとき、そのループに電流が生じるという法則である
・彼はループを横切る磁束の時間変化と流れる電流との間には

$$I = -\sigma \frac{d\Phi}{dt}$$

の関係があることを実測の結果から証明した
・ここで σ は導電率であり、S を電流ループを囲う領域であるとして、磁束を次式で定義する：

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

・上の電流表示は我々が一般に言う **<ファラディの電磁誘導の法則>** である
・再度、この法則の局所的な現象を見てみよう
・電流密度を $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ とすると、断面領域 S の微小領域 ∂S で

$$I = \int_{\partial S} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{l}$$

が成り立つ、先の関係式を用いると次式が得られる：

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\partial S} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

電磁波の世界：やや詳しい説明 (9/14)

・一方、導体を流れる電荷と外部印加電界 $\boldsymbol{E}$ は電流 $\boldsymbol{J}$ をつくる
・この関係は **<オームの法則(Ohm)>** と呼ばれ、

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

で記述される
・従って、先の式は次のように変形できる：

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

・ S は任意であるので、**<ストークスの定理(Stokes)>** を使うと微視的な現象として

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

が得られる

☞ 変位電流の発明発見がキー …

・以上で電磁波に関する一般的な電磁波工学への基本ができた
・アンペアの法則における電流

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

は局所的であると仮定される
・今、冒頭の電流電荷保存則 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ とこれを比較すると、全ての座標に対して

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0$$

を得る　この示唆するところは、電荷の時間変化は無いということ、つまり一定ということ

電磁波の世界：やや詳しい説明(10/14)

・しかし、一般に電荷密度は時間に対し一定である必要はない
・この矛盾がマックスウェルを悩まし、ファラディの偏極(polarization)について考えるきっかけとなった
・この意味は正負の電荷は電気ダイポールを形成するということである
・2つの点電荷、座標 $\boldsymbol{r}$ における正の電荷 $q>0$ と $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{d}$ の負の電荷荷 $-q$ を考える
・電気ダイポールの数学的な表現は、$|\Delta\boldsymbol{d}|\to\infty,\ q\to\infty$ のとき荷 $\boldsymbol{P}=q\Delta\boldsymbol{d}$は定数値をとることである
・マックスウェルのブレークスルー：先の偏極とは電荷のわずかな位置の変化が電流を意味していること
・マックスウェルはアンペアの法則に新しい電流 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ を加え、次の方程式を完結させた：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

・線形で均質な媒質内で電束密度 $\boldsymbol{D}$ と電界 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

の関係がある、ε は **<電気的誘電率(permittivity)>** と呼ばれる
・これは電界内の媒質がどの程度偏極しているかを示唆している
・結局、線形均質媒質内のマックスウェルの方程式はつぎのようになった：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\sigma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

・ここで、電流密度 $\boldsymbol{J}$ は導電流と言われ、一般の散乱問題では現れない電流であり、しばしば省略される量である
・また、電束密度と電荷の関係式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

は次の **<クーロンの法則(Coulomb)>** より導くことができる：

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}$$